Adı Soyadı: Numarası: 27.01.2022

2021-2022 GÜZ DÖNEMİ CEBİR I FİNAL SINAVI SORULARI

1) a) G bir grup ve $b \in G$ olsun. Her $x \in G$ için $f_b(x) = bxb^{-1}$ ile tanımlı f_b fonksiyonu bir grup otomorfizması olur mu, araştırınız.

   b) S_8 de $\alpha = (4\ 3\ 1)(5\ \ 7)(1\ 4\ 5)(2\ 8)(2\ \ 6\ \ 5)$ permütasyonu veriliyor. $o(\alpha)$ 'yı ve $M(\alpha)$'yı bulunuz

2) a) $\mathbb{Z}_{10}^{*}$ grubunun izomorf olduğu permütasyon grubunu bulup işlem tablosunu yapınız.

   b) $\mathbb{Z}_{16}^{*}$ grubu ve $H = \{\bar{1}, \overline{15}\}$ alt kümesi veriliyor. $H \lhd \mathbb{Z}_{16}^{*}$ olduğu bilindiğine göre $\mathbb{Z}_{16}^{*}/H$ bölüm grubunu bulunuz.

3) a) H, G grubunun hem devirli hem de normal bir alt grubu olsun. Bu durumda H'ın her N alt grubu için $N \lhd G$ olduğunu gösteriniz.

   b) $91x \equiv 13 \pmod{161}$ kongrüansının çözümü varsa bulunuz.

4) a) $\mathbb{Z}_{24}$ grubunda $\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$ elemanlarının mertebelerini bulunuz ve $\mathbb{Z}_{24}$ grubunun devirli olup olmadığını belirleyiniz.

   b) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ve her $m, n \in \mathbb{Z}$ için $f(mn) = m + n$ dönüşümü fonksiyon olur mu? Araştırınız.

5) $56\mathbb{Z}, 7\mathbb{Z}, 8\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$ olduğu bilindiğine göre

$$\mathbb{Z}/56\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$$

olduğunu Homomorfizma Teoreminden faydalanarak gösteriniz.

NOT: Sınav süresi 100 dakika olup soruların herbiri eşit puanlıdır. İstediğiniz sorudan başlayabilirsiniz.

BAŞARILAR
Prof. Dr. Şenol EREN

Cebir 1 Final Cevap Anahtarı

1 a) Bir G grubunun kendi üzerine bir izomorfizmasına otomorfizma denir. O halde $f_b: G \to G$ $\forall x\in G$ için $f_b(x)=bxb^{-1}$ fonksiyonunun izomorfizma old göstermeliyiz

$\forall x,y\in G$ için

$f_b(xy)=b(xy)b^{-1}=(bxb^{-1})(byb^{-1})$
$= f_b(x)\,f_b(y)$ olup f_b homomorfizmadır.

$\forall x,y\in G$ için $f_b(x)=f_b(y) \Rightarrow bxb^{-1}=byb^{-1}$
$\Rightarrow x=y$ olup f_b birebirdir.

$\forall y\in G$ için $f_b(x)=bxb^{-1}=y$ o.ş. $\exists x\in G$ bulunabileceğinden f_b örtendir. O halde f_b bir grup otomorfizması olur.

b) α'yı ayrık yazalım.
$\alpha=(1\,3)(2\,6\,4\,7\,5\,8)$ olup $o(\alpha)=[2,6]=6$ bulun. $\beta\alpha\beta^{-1}=\alpha$ ise

$M(\alpha)=\{\beta\in S_8 \mid \beta\alpha\beta^{-1}=\alpha\}$ olacağından

$(\beta(1)\beta(3))(\beta(2)\beta(6)\beta(4)\beta(7)\beta(5)\beta(8))$
$=(1\,3)(2\,6\,4\,7\,5\,8)$
$=(1\,3)(6\,4\,7\,5\,8\,2)$
$=(1\,3)(4\,7\,5\,8\,2\,6)$
$=(1\,3)(7\,5\,8\,2\,6\,4)$
$=(1\,3)(5\,8\,2\,6\,4\,7)$
$=(1\,3)(8\,2\,6\,4\,7\,5)$
$=(3\,1)(2\,6\,4\,7\,5\,8)$
$=(3\,1)(6\,4\,7\,5\,8\,2)$
$=(3\,1)(4\,7\,5\,8\,2\,6)$
$=(3\,1)(7\,5\,8\,2\,6\,4)$
$=(3\,1)(5\,8\,2\,6\,4\,7)$
$=(3\,1)(8\,2\,6\,4\,7\,5)$

1 ele

$M(\alpha)=\{I,\ (2\,6\,4\,7\,5\,8),\ (2\,4\,5)(6\,7\,8),\ (2\,5\,4)(6\,8\,7),\ (2\,7)(6\,5)(4\,8),\ (2\,8\,5\,7\,4\,6),\ (1\,3),\ (1\,3)(2\,6\,4\,7\,5\,8),\ (1\,3)(2\,4\,5)(6\,7\,8),\ (1\,3)(2\,7)(6\,5)(4\,8),\ (1\,3)(2\,5\,4)(6\,8\,7),\ (1\,3)(2\,8\,5\,7\,4\,6)\}$

2) a) $\mathbb{Z}_{10}^* = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$, $\forall m \in \mathbb{Z}_{10}^*$ için

$f_m(x) = mx$ olmak üzere f_m permütasyonları

aş. şekilde ifade edilir

$$f_{\bar{1}} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{7} & \bar{9} \\ \bar{1} & \bar{3} & \bar{7} & \bar{9} \end{pmatrix} \qquad f_{\bar{3}} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{7} & \bar{9} \\ \bar{3} & \bar{9} & \bar{1} & \bar{7} \end{pmatrix}$$

$$f_{\bar{7}} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{7} & \bar{9} \\ \bar{7} & \bar{1} & \bar{9} & \bar{3} \end{pmatrix} \qquad f_{\bar{9}} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{7} & \bar{9} \\ \bar{9} & \bar{7} & \bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{9}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{9}$	$\bar{3}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$

	$f_{\bar{1}}$	$f_{\bar{3}}$	$f_{\bar{7}}$	$f_{\bar{9}}$
$f_{\bar{1}}$	$f_{\bar{1}}$	$f_{\bar{3}}$	$f_{\bar{7}}$	$f_{\bar{9}}$
$f_{\bar{3}}$	$f_{\bar{3}}$	$f_{\bar{9}}$	$f_{\bar{1}}$	$f_{\bar{7}}$
$f_{\bar{7}}$	$f_{\bar{7}}$	$f_{\bar{1}}$	$f_{\bar{9}}$	$f_{\bar{3}}$
$f_{\bar{9}}$	$f_{\bar{9}}$	$f_{\bar{7}}$	$f_{\bar{3}}$	$f_{\bar{1}}$

b) $\mathbb{Z}_{16}^* = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{15}\}$

$H = \{\bar{1}, \overline{15}\}$ olup $|\mathbb{Z}_{16}^*| = (\mathbb{Z}_{16}^* : H) \cdot |H| \Rightarrow (\mathbb{Z}_{16}^* : H) = 4$

$\mathbb{Z}_{16}^*/H = \{\bar{a}H \mid \bar{a} \in \mathbb{Z}_{16}^*\}$

$= \{H, \bar{3}H, \bar{5}H, \bar{7}H, \bar{9}H, \overline{11}H, \overline{13}H, \overline{15}H\}$

indeks 4 old. $\mathbb{Z}_{16}^*/H$ 4 elemanlıdır

$\bar{3}H = \{\bar{3}, \overline{13}\}$

$\bar{5}H = \{\bar{5}, \overline{11}\}$

$\bar{7}H = \{\bar{7}, \bar{9}\}$

$\bar{9}H = \{\bar{9}, \bar{7}\} = \bar{7}H$

$\overline{11}H = \{11, 5\} = \bar{5}H$

$\overline{13}H = \{\overline{13}, \bar{3}\} = \bar{3}H$

$\overline{15}H = \{\bar{1}, \overline{15}\} = H$

O halde

$\mathbb{Z}_{16}^*/H = \{H, \bar{3}H, \bar{5}H, \bar{7}H\}$

3) a) H, G'nin hem devirli hem de normal alt grubu ise $H=\langle a \rangle$ oş $a\in H$ vardır ve $H \trianglelefteq G$ dir

$N<H$ için devirli bir grubun her alt grubu da devirli old N devirlidir $N=\langle a^n \rangle$ oş $n\in \mathbb{Z}$ vardır

$N \trianglelefteq G$ old. göst. için $\forall g\in G, \forall a^{nk}\in N$ için

$g a^{nk} g^{-1} \in N$ olmalıdır

$H \trianglelefteq G$ old. biliyoruz O halde $\forall g\in G, \forall h\in H$ için

$ghg^{-1}\in H$ $\Rightarrow$ $a\in H$ old $gag^{-1}\in H$ dır $H=\langle a \rangle$ ise

$gag^{-1}=a^m$ oş $m\in \mathbb{Z}$ vardır

$$(gag^{-1})^{nk} = (gag^{-1})(gag^{-1})\cdots(gag^{-1})$$
$$= (g a^{nk} g^{-1})$$
$$= a^{mnk} = (a^n)^{mk} \in N \text{ bulunur}$$

Yani $g a^{nk} g^{-1} \in N$ olup $N \trianglelefteq G$ dir

b) $91x \equiv 13 \pmod{161}$

$(91,161)=7$ olup $7\nmid 13$ old kongrüansın çözümü yoktur.

4 a) $\mathbb{Z}_{24}$ grubunda $o(\bar{2})=12$, $o(\bar{3})=8$, $o(\bar{4})=6$, $o(\bar{5})=24$ olur

$|\mathbb{Z}_{24}|=24$ olup $|\mathbb{Z}_{24}|=|\bar{5}|$ oş $\bar{5}\in\mathbb{Z}_{24}$ var olduğundan $\mathbb{Z}_{24}$ devirlidir

b) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(mn)=m+n$ dönüşümü

$n=1$ alınırsa $\forall m\in\mathbb{Z}$ için $f(m)=m+1\in\mathbb{Z}$ olup kapalıdır. Fakat $f(4)=f(2.2)=2+2=4$ iken

$f(4)=f(4.1)=4+1=5$

$f(4)=5$ olup f iyi

ise $f(4)=4$ hem de $f(4)=5$ değildir

tanımlı değildir f fonksiyon değildir

5) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}}$ $\forall a \in \mathbb{Z}$ için

$f(a) = (a+7\mathbb{Z}, a+8\mathbb{Z})$ ile tanımlayalım

f iyi tanımlıdır: $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ $a=b$ için

$a+7\mathbb{Z} = b+7\mathbb{Z}$ ve $a+8\mathbb{Z} = b+8\mathbb{Z}$ olup

$(a+7\mathbb{Z}, a+8\mathbb{Z}) = (b+7\mathbb{Z}, b+8\mathbb{Z}) \Rightarrow f(a) = f(b)$.

f homomorfizmadır: $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ için

$f(a+b) = (a+b+7\mathbb{Z}, a+b+8\mathbb{Z})$

$f(a+b) = (a+7\mathbb{Z}+b+7\mathbb{Z}, a+8\mathbb{Z}+b+8\mathbb{Z})$

$f(a+b) = (a+7\mathbb{Z}, a+8\mathbb{Z}) + (b+7\mathbb{Z}, b+8\mathbb{Z})$

$f(a+b) = f(a) + f(b)$

f örtendir: $\forall (a+7\mathbb{Z}, b+8\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}}$ için

$\mathbb{Z} = \langle 7 \rangle + \langle 8 \rangle$ ile yazılabilir

$a,b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 7x+8y$, $b = 7x'+8y'$ os $x,y,x',y' \in$

$f(7x'+8y) = (7x'+8y+7\mathbb{Z}, 7x'+8y'+8\mathbb{Z})$

$= (8y+7\mathbb{Z}, 7x'+8\mathbb{Z})$

$= (a+7\mathbb{Z}, b+8\mathbb{Z})$ olup

$\forall (a+7\mathbb{Z}, b+8\mathbb{Z})$ için $f(7x'+8y) = (a+7\mathbb{Z}, b+8\mathbb{Z})$ os

$\exists 7x'+8y \in \mathbb{Z}$ vardır

Homomorfizma Teo. göre

$$\mathbb{Z}/_{\text{Çek} f} \cong \mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}}$$

$\text{Çek} f = \{a \in \mathbb{Z} \mid f(a) = (7\mathbb{Z}, 8\mathbb{Z})\}$

$= \{a \in \mathbb{Z} \mid (a+7\mathbb{Z}, a+8\mathbb{Z}) = (7\mathbb{Z}, 8\mathbb{Z})\}$

$= \{a \in \mathbb{Z} \mid a+7\mathbb{Z} = 7\mathbb{Z}$ ve $a+8\mathbb{Z} = 8\mathbb{Z}\}$

$= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \in 7\mathbb{Z}$ ve $a \in 8\mathbb{Z}\}$

$= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \in 56\mathbb{Z}\}$

$= \{a \in \mathbb{Z} \mid$

$= 56\mathbb{Z}$. O halde $\mathbb{Z}/_{56\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}}$